قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الثالثة

9 صفحات

الدكتور: مُعاذ عبد المجيد

التاريخ: ٢٠١٤/٩/٢٥

التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي في الإحداثيات المنحنية المتعامدة:

حالات خاصة:

١.الإحداثيات الاسطوانية:

$$\vec{r} = (\rho\cos\varphi)\hat{\imath} + (\rho\sin\varphi)\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$h_\rho = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = |(\cos\varphi)\,\hat{\imath} + (\sin\varphi)\hat{\jmath}| = 1$$

$$h_\varphi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = |(-\rho\sin\varphi)\hat{\imath} + (\rho cos\varphi)\hat{\jmath}| = \rho$$

$$h_z = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = |\hat{k}| = 1$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla}F = \left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{K}\frac{\partial}{\partial z}\right)f$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}\square\vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{matrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{k} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_K \end{matrix}$$

٢.الإحداثيات الكروية:

$$\vec{r} = (\mathrm{r}\sin\theta cos\varphi)\hat{\imath} + (rsin\theta sin\varphi)\hat{\jmath} + (rcos\theta)\hat{k}$$

$$h_r = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = \left|(\sin\theta cos\varphi)\hat{\imath} + (rsin\theta sin\varphi)\hat{\jmath} + (cos\theta)\hat{k}\right| = 1$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = \left|(rcos\theta cos\varphi)\hat{\imath} + (rcos\theta sin\varphi)\hat{\jmath} + (-rsin\theta)\hat{k}\right| = r$$

$$h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = \left|(-r\, sin\theta\, sin\varphi)\hat{\imath} + (r\sin\theta\ \cos\varphi)\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right| = r\sin\theta$$

وعليه فإن:

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{rsin\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) f$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{bmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & (rsin\,\theta)\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & (rsin\,\theta)F_\varphi \end{bmatrix}$$

• **مثال:** أثبت أن الحقل العددي $f = \left(r + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta$ توافقي في نطاق يطلب تعيينه.

الحل:

$J_1 = r^2\sin\theta \neq 0$ يجب أن يحقق $D \Leftarrow J_1 \neq 0$ و $f \in cl^2(D)$

أي D لا تحوي المحور oz .

حتى يكون f توافقي يجب أن يكون $\nabla^2 f = 0$

$$\nabla^2 f = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{cos\theta}{r^2 sin\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 0$$

$$= \frac{2}{r}\left(1 - \frac{2}{r^3}\right) cos\theta + \frac{6}{r^4} cos\theta + \frac{cos\theta}{r^2 sin\theta}\left(r + \frac{1}{r^2}\right)(-sin\theta)$$
$$+ \frac{1}{r^2}\left(r + \frac{1}{r^2}\right)(-cos\theta) = 0$$

$\Leftarrow$ f توافقي في D.

• **مثال:** أحسب تدرج $f = \rho(sin\varphi - cos\varphi) + \sqrt{\rho^2 + z^2}$

في المنطقة المحاطة بالسطوح $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ $\quad z = 0\,,\ z = 1$

الحل: بما أن المنطقة لا تحوي oz فالتدرج موجود

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = sin\varphi - cos\varphi + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$\vec{\nabla} f = \hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \rho(\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}) + \hat{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)$$
$$+ \hat{k}\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

مثال: ليكن $\quad \vec{F} = z\hat{\rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} + \rho\hat{k}$

برهن أن $\vec{F}$ كموني في منطقة لا تشمل oz أو جهته.

rbt
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

الحل:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 1 & \rho \end{bmatrix}$$

$$= \hat{\rho}(0) + \rho\hat{\varphi}(1-1) + \hat{k}(0) = \vec{0}$$

إذاً $\vec{F}$ كموني وبالتالي يوجد تابع f بحيث $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ يسمى الكمون العددي :

$$z\hat{\rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} + \rho\hat{k} = \hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$z = \frac{\partial f}{\partial \rho} \Rightarrow f = z\rho + g(\varphi, z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varphi} = g_{\varphi}^{\cdot} + 0 = 1 \Rightarrow g = \varphi + h(z)$$

$$f = z\rho + \varphi + \mathrm{h}(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \rho = \rho + \dot{h_z} \Rightarrow h = c$$

حيث c ثابت اختياري .

$$f = z\rho + \varphi + c$$

• التكامل العددي لتابع شعاعي:

إذا كان $\vec{f}$ تابع شعاعي لمتحول حقيقي واحد t حيث

$$\vec{f} = f_1\hat{\imath} + f_2\hat{\jmath} + f_3\hat{k}$$

واذا كان $f_1, f_2, f_3 \in cl[a,b]$، فأن التكامل المحدد ل $\vec{f}$ هو بالتعريف

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = \hat{\imath}\int f1\,dt + \hat{\jmath}\int f2\,dt + \hat{k}\int f3\,dt$$

وعليه، فأن خواص هذا التكامل هي نفس خواص التكامل المحدد للتوابع العددية .

مثال ليكن:

$$\vec{a} = 2cos2t\,\hat{\imath} + 3\sin 2t\,\hat{\jmath} + 6t\,\hat{k}$$

$(0 \le t)$ تسارع جسيم في لحظة t عين شعاع السرعة $\vec{v}(t)$ و شعاع الموضع $\vec{r}(t)$ إذا علمت أن $\vec{v}(0) = \vec{0}$ و $\vec{r}(0) = \vec{0}$

الحل:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ومنه

$$\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\,\,dt = \sin 2t\,\hat{\imath} - \frac{3}{2}(\,cos2t - 1)\,\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ومنه

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\,\,dt = \frac{1}{2}(1 - \,cos2t)\,\hat{\imath} - \frac{3}{2}(\frac{\sin 2t}{2} - t)\hat{\jmath} + t^3\hat{k}$$

rbt
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

المنحني الموجه: ليكن Γ منحنياً فراغياً أملساً يصل بين النقطتين A وB أي يوجد في كل نقطة $M(\vec{r})$ من Γ مماس وحيد يتغير باستمرار بتغير نقطة التماس . يمكن توجيه هذا المنحني باتجاهين مختلفين. فإذا أخذنا A

Γ يُقرأ غامّا

هو الحرف الثالث من الأبجدية الإغريقية

يأخذ الحرف شكلين الكبير (Γ) والصغير(γ)

مبدأ لقياس طول القوس. فإننا نقول إن Γ موجه من A إلى B

إذا فرضنا

$$L = \widehat{AM}$$

$$\frac{\overrightarrow{dr}}{dl} = \hat{T}$$

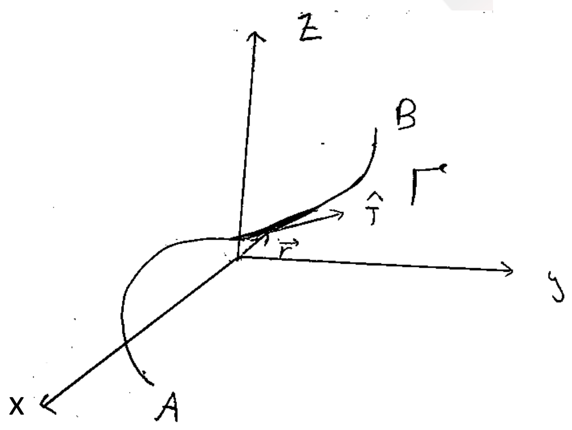
حيث $\hat{T}$: شعاع توجيه المماس

أي أن $\overrightarrow{dr} = \hat{T}$ ولكن $\overrightarrow{dl} = \hat{T}$ (عنصر طول موجه)

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr}$$

إذا كان Γ أملس جزئياً فيمكن أن نوجه كل جزء أملس منه بالطريقة نفسها

ينطبق هذا الكلام أيضاً إذا كان Γ مغلقاً أو مستوياً



أنواع التكاملات الخطية على منحنٍ موجه:

التكامل الخطي العددي للتابع الشعاعي لـ $\vec{F} \in cl(D)$

حيث D منطقة تحوي المنحني الموجه Γ

ويسمى هذا التكامل جولان $\vec{F}$ حول Γ .

$$\int_\Gamma \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_\Gamma \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_\Gamma (\vec{F}.\hat{t})\,dl = \int_\Gamma f\,dl$$

حيث $\vec{F}.\hat{t} = f$ تابع عددي مستمراً ومستمراً جزئياً على Γ فالتكامل موجود.

ولما كان $F = (F_1, F_2, F_3)$ و $dl = (d_x, d_y, d_z)$

$$\int_\Gamma \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_\Gamma (F_1 d_x + F_2 d_y + F_3 dz)$$

إذا كان المنحني Γ مغلقاً نرمز للجولان $\oint_\Gamma \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

• **مبرهنة**: إذا كان $\vec{F}$ كموني فإن جولانه مستقل عن المسار

البرهان: $\vec{F}$ كموني $\Leftarrow$ يوجد كمون عددي $f \in cl^2(D)$ بحيث $\vec{\nabla}.f = \vec{F} \Leftarrow$

$$\Leftarrow \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \vec{\nabla}f.\overrightarrow{dl} = \vec{\nabla}f.\overrightarrow{dr} = df$$

$$\int_\Gamma \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_\Gamma \vec{\nabla}f.\overrightarrow{dl} = \int_\Gamma df = f(B) - f(A)$$

• **نتيجة**: إذا كان $\vec{F}$ كموني فإن جولانه حول منحني مغلق يساوي الصفر

مثال: تحقق إذا كان $\vec{F} = (x^2y, x - z, xyz)$ كمونياً ،ثم احسب جولانه حول Γ في الحالتين :

١) Γ قوس من القطع المكافئ $y = x^2$ الواقع في المستوي $z = 2$ الواصل بين النقطتين: $A(0,0,2), B(1,1,2)$

٢) Γ القطعة المستقيمة $y = x$ في المستوي $z = 2$ بين النقطتين A, B

الحل:

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ x^2y & x-z & xyz\end{vmatrix}=(xz+1,-yz,1-x^2)\neq\vec{0}$$

اذاً $\vec{F}$ غير كموني ،فالجولان مرتبط بالمسار

١) نوجد التمثيل الوسيطي للمنحني:

$$z=2,y=t^2,x=t\Longrightarrow\vec{r}=(t,t^2,2)$$

$$I=\int_{\Gamma}(x^2y)dx+(x-z)dy+(xyz)dz$$

$$=\int_0^1 t^2.t^2dt+(t-2)2tdt+2tt^2.0$$

$$\left[\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}t^3-2t^2\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-2=-\frac{17}{15}$$

يمكن حله دون التمثيل الوسيطي

$$I=\int_0^1 x^2.x^2dx+\int_0^1(x-2)2xdx+\int_0^1 x^2.2.0$$

٢) $I=\int_{\Gamma}\vec{F}.\overrightarrow{dl}=\int_{\Gamma}(x^2y,x-z,xyz).(dx,dy,dz)$

$=\int_0^1 x^2xdx+\int_0^1(x-2)dx+\int_0^1 x^2.2.0=-\frac{5}{2}$

كما نرى اختلفت النتيجة باختلاف المسار لان $\vec{F}$ غير كموني

مثال: أعد حل التمرين من اجل $\vec{F}=(xy,x-y,xyz)$ و النقط

$A(0,0,1)\quad B(2,4,1)$ في الحالتين :

١) Γ جزء من القطع $y = x^2$ في المستوي $z = 1$

٢) Γ جزء من المستقيم $y = 2x$ في المستوي $z = 1$

عدم تحقيق هدفك ليس مأساة الحياة
بل المأساة ألا يكون لديك هدف لتصل

بينجامين مايز
1984 ~1894